

Un circuito è costituito da due guide conduttrici parallele, verticali, distanti b e di resistenza trascurabile, collegate da un filo di resistenza R e da una sbarra mobile (CD). La sbarra, di resistenza trascurabile e massa m , può scivolare senza attrito lungo le guide sotto l'effetto della forza peso. Il circuito è immerso in un campo magnetico \vec{B} , uniforme e costante, ortogonale al piano del circuito ed uscente (vedi figura).

Si studi il moto della sbarra mobile CD e si determini il valore della sua velocità limite.

Si trascuri il fenomeno dell'autoinduzione.

Soluzione

Mentre la sbarra mobile CD scivola verso il basso (sotto l'effetto della forza peso) il flusso del campo magnetico concatenato al circuito varia e si genera, per la legge di Faraday, una forza elettromotrice indotta. Questa forza elettromotrice fa circolare una corrente, che per la legge di Lenz, ha verso tale da opporsi alla causa che la genera: il moto della sbarra verso il basso. Il verso della corrente indotta è quello antiorario; in questo caso infatti sulla sbarra CD vi è una forza magnetica verso l'alto il cui valore è

$$F_M = |i_{ind} \vec{b} \times \vec{B}| = i_{ind} b B = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} b B$$

essendo $i_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R}$ ed \mathcal{E}_{ind} il valore assoluto della forza elettromotrice indotta.

Per la legge di Faraday

$$\mathcal{E}_{ind} = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{B v dt b}{dt} = B b v$$

Il moto della sbarra verso il basso è descritto quindi dall'equazione:

$$m a = m \frac{dv}{dt} = F_P - F_M = mg - \frac{(B b)^2 v}{R} \quad (1)$$

Questa è una equazione differenziale lineare del primo ordine, non omogenea, e può essere risolta per separazione delle variabili:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg - \frac{B^2 b^2}{R} v \Rightarrow m dv = \left(mg - \frac{B^2 b^2}{R} v \right) dt \Rightarrow \frac{B^2 b^2 dv}{B^2 b^2 v - mgR} = -\frac{B^2 b^2 dt}{Rm} \Rightarrow \\ \int_0^v \frac{B^2 b^2 dv}{B^2 b^2 v - mgR} &= -\int_0^t \frac{B^2 b^2 dt}{Rm} \Rightarrow \ln \left(\frac{B^2 b^2 v - mgR}{-mgR} \right) = -\frac{B^2 b^2 t}{Rm} \Rightarrow \frac{B^2 b^2 v - mgR}{-mgR} = e^{-\frac{B^2 b^2 t}{Rm}} \Rightarrow \\ \frac{B^2 b^2 v - mgR}{-mgR} &= e^{-\frac{B^2 b^2 t}{Rm}} \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 b^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 b^2 t}{Rm}} \right) \end{aligned}$$

La velocità limite è la velocità per $t \rightarrow \infty$ e vale quindi

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mgR}{B^2 b^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 b^2 t}{Rm}} \right) = \frac{mgR}{B^2 b^2}$$

Tale valore può essere ottenuto molto più facilmente imponendo $a=0$ nell'equazione del moto (1).

